

Рассмотрен общий принцип инвариантности в теории переноса излучения. Получены инвариантные соотношения, справедливые для дисперсных пространственно-ограниченных сред, которые обобщены на случай среды, ограниченной отражающими поверхностями. Определен коэффициент диффузного отражения излучения от дисперсной среды с использованием принципа инвариантности.

Принципы инвариантности и симметрии играют важную роль в современной физике [1]. В оптике инвариантные соотношения широко используются при расчете оптических систем [2]. В теории переноса излучения принцип инвариантности применяется для получения результатов даже без использования уравнения переноса излучения [3, 4]. Общий принцип инвариантности формулируется следующим образом [5]. Пусть имеется рассеивающая среда с произвольно распределенными источниками, мощность которых зависит только от одной пространственной координаты τ (τ – оптическая плотность среды). Выделим внутри среды два уровня τ_1 и τ_2 и рассмотрим слой, лежащий между ними. Тогда интенсивность диффузного излучения (или функция источника) в этом слое одновременно есть функция источника всей среды. Излучение на границах выделенной области определяется рассеянием в остальной части дисперсной среды. Частными случаями этого принципа являются классические принципы инвариантности В.А. Амбарцумяна [6] и С. Чандрасекара [7] или метод удвоения слоев, используемый в методе многократных отражений [8]. Важным моментом общего принципа инвариантности является то, что он применим для среды любой геометрии, т.к. выделенная область, являющаяся частью всей среды, может быть ограничена поверхностью произвольной формы, и эта часть взаимодействует со всей средой благодаря поступлению излучения через границы выделенной части. Эта же идея содержится в методе поверхностных псевдоисточников [9]. Однако это свойство общего принципа инвариан-

ности не использовалось для получения инвариантных соотношений в ограниченных средах.

Известные инвариантные соотношения формулируются для среды, неограниченной в поперечном (по отношению к направлению распространения излучения) направлении. В данной работе получено соотношение, которое остается постоянным при изменении поперечных оптических размеров среды и коэффициента отражения поверхностей, ограничивающих рассеивающую среду. Наиболее близким к найденному инварианту является фотометрический инвариант [10, 11], имеющий вид

$$\frac{1 + \rho^2 + \tau^2}{\rho^2} = \text{const}, \quad (1)$$

где τ и ρ – коэффициенты пропускания и отражения слоя дисперсной среды. Рассмотрим, как влияет поперечная ограниченность среды, расположенной между отражающими поверхностями с коэффициентом отражения r , на пропускание и отражение излучения.

Введем основные параметры, поясняющие постановку задачи. Используем модель среды в виде прямоугольного параллелепипеда с оптическими размерами τ_{x_0} , τ_{y_0} , τ_{z_0} , освещаемого коллимированным потоком излучения интенсивности $I_0=1$, направленным по нормали к плоскости yz , при использовании декартовой системы координат. В качестве параметров элементарного объема среды рассматриваются коэффициент ослабления $\alpha=\sigma+\kappa$ (где σ и κ – коэффициенты рассеяния и

поглощения), вероятность выживания кванта $\Lambda = \sigma/\alpha$ и индикатриса рассеяния излучения $\chi(\theta)$ (θ – угол рассеяния), представленная в виде интегральных параметров η , β , μ с условием нормировки $\eta + \beta + 4\mu = 1$. Параметры η , β , μ определяются как:

$$\eta = \frac{|F_{+x}|}{F}; \beta = \frac{|F_{-x}|}{F}; \mu = \frac{|F_{\pm y}|}{F} = \frac{|F_{\pm z}|}{F}, \text{ где}$$

$$F_{+x} = 2\pi \int_0^{\pi/2} \chi(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta;$$

$$F_{-x} = 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} \chi(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta;$$

$$F_{\pm y, z} = 2 \int_0^{\pi} \chi(\theta) \sin^2 \theta d\theta;$$

$$F = |F_{+x}| + |F_{-x}| + 4|F_{\pm y, z}|.$$

Формулы для расчета потоков излучения, пропущенного $I_1(\tau_0, \Lambda, \theta, r)$ и отраженного $I_2(\tau_0, \Lambda, \theta, r)$ средой с отражающими поверхностями, получены с использованием принципа инвариантности и имеют вид

$$I_1(\tau_0, \Lambda, \theta, r) = \frac{t[1 - R^2(\tau_{y,z}, \Lambda, \theta, r) \exp[-K(\tau_{y,z}, \Lambda, \theta, r)\tau_{x_0}]]}{A^2 - B^2 \exp[-2K(\tau_{y,z}, \Lambda, \theta, r)\tau_{x_0}]}; \quad (2)$$

$$I_2(\tau_0, \Lambda, \theta, r) =$$

$$I_2(\tau_0, \Lambda, \theta, r) = \frac{t[R\tau_{y,z}, \Lambda, \theta, r]A - B \exp[-K(\tau_{y,z}, \Lambda, \theta, r)\tau_{x_0}]}{A^2 - B^2 \exp[-2K(\tau_{y,z}, \Lambda, \theta, r)\tau_{x_0}]}, \quad (3)$$

где $A = 1 - rR(\tau_{y,z}, \Lambda, \theta, r)$, $B = R(\tau_{y,z}, \Lambda, \theta, r) - r$.

Здесь τ_0 – оптические размеры среды, t и r – коэффициенты пропускания и отражения отражающих поверхностей, $K(\tau_{y,x}, \Lambda, \theta, r)$ – функция, определяющая перераспределение излучения с направлений y, z на направление x , $R(\tau_{y,x}, \Lambda, \theta, r)$ – функция, имеющая смысл коэффициента отражения среды при $\tau \rightarrow \infty$.

В частном случае консервативной ($\Lambda=1$) симметричной среды ($\tau_{y_0} = \tau_{x_0}$), ограниченной отражающими поверхностями с одинаковым коэффициентом отражения r , параметры, входящие в формулы (2) и (3), имеют следующий вид:

$$\nu(\tau_y, \theta, r) = \frac{8S_1(\tau_y, \theta, r)S_2(\tau_y, \theta, r)}{[1 - S_1(\tau_y, \theta, r)][2 - S_2(\tau_y, \theta, r)] + 8S_1(\tau_y, \theta, r)},$$

где

$$S_1(\tau_y, \theta, r) = 1 - \frac{(1-r)[1 + R_1(\tau_y, \theta, r)]\{1 - \exp[-K_1(\tau_y, \theta, r)\tau_{y_0}]\}}{K_1'(\tau_y, \theta, r)\tau_{y_0}(A_1 - B_1) \exp[-K_1(\tau_y, \theta, r)\tau_{y_0}]},$$

$$S_2(\tau_y, \theta, r) = 1 - \frac{(1-r)[1 + R_1'(\theta)]\{1 + \exp[-K_1'(\theta)\tau_{y_0}]\}}{\{A_1' + B_1' \exp[-K_1'(\theta)\tau_{y_0}]\}K_1'(\theta)\tau_{y_0}}$$

введены обозначения: $A_1 = 1 - rR_1(\tau_y, \theta, r)$, $B_1 = R_1(\tau_y, \theta, r) - r$, $A_1' = 1 - rR_1'(\theta)$, $B_1' = 1 - rR_1'(\theta)$.

Переменные коэффициенты определяются по формулам

$$K_1'(\theta) = 2\sqrt{\mu(1-\eta+\beta)};$$

$$K_1(\tau_y, \theta) = \frac{K_1'(\theta)}{2} \sqrt{4 - \nu_1(\tau_y, \theta)};$$

$$K(\tau_y, \theta) = K_1'(\theta) \sqrt{1 - \nu(\tau_y, \theta)};$$

$$\nu_1(\tau_y, \theta) = 1 - \frac{([1 + R_1'(\theta)]\{1 - \exp[-K_1'(\theta)\tau_{y_0}]\})}{K_1'(\theta)\tau_{y_0}\{1 + R_1'(\theta) \exp[-K_1'(\theta)\tau_{y_0}]\}};$$

$$R(\tau_y, \theta) = \frac{1 - \eta + \beta - K(\tau_y, \theta)}{1 - \eta + \beta + K(\tau_y, \theta)}. \quad (4)$$

Параметры $R_1(\tau_y, \theta)$ и $R_1'(\theta)$ вычисляются по формуле (4) при подстановке $K_1(\tau_y, \theta)$ и $K_1'(\theta)$ соответственно. Уравнение для $K(\tau_{y,x}, \Lambda, \theta, r)$ и $R(\tau_{y,x}, \Lambda, \theta, r)$ имеют следующий вид:

$$K(\tau_{y,z}, \Lambda, \theta, r) = \sqrt{4\mu[1 - \nu(\tau_{y,z}, \Lambda, \theta, r)][1 - (\eta - \beta)]}; \quad (5)$$

$$R(\tau_{y,z}, \Lambda, \theta, r) = \frac{K(\tau_{y,z}, \Lambda, \theta, r) - 4\mu[1 - \nu(\tau_{y,z}, \Lambda, \theta, r)]}{K(\tau_{y,z}, \Lambda, \theta, r) + 4\mu[1 - \nu(\tau_{y,z}, \Lambda, \theta, r)]}. \quad (6)$$

Совместное решение уравнений для $K(\tau_{y,x}, \Lambda, \theta, r)$ и $R(\tau_{y,x}, \Lambda, \theta, r)$ приводит к соотношению:

$$\beta + 2\mu = \frac{1}{2\Lambda} \times \left\{ \frac{K(\tau_{y,z}; \Lambda; \theta; r)[1 + R(\tau_{y,z}; \Lambda; \theta; r)]}{1 - R(\tau_{y,z}; \Lambda; \theta; r)} - (1 - \Lambda) \right\}. \quad (7)$$

В случае консервативной среды $\Lambda=1$:

$$\beta + 2\mu = \frac{1}{2} \frac{K(\tau_{y,z}; \Lambda; \theta; r)[1 + R(\tau_{y,z}; \Lambda; \theta; r)]}{1 - R(\tau_{y,z}; \Lambda; \theta; r)}. \quad (8)$$

Так как сумма $\beta + 2\mu$ постоянна, то эти выражения являются инвариантами для данного вещества, справедливыми при любых оптических размерах рассеивающей среды.

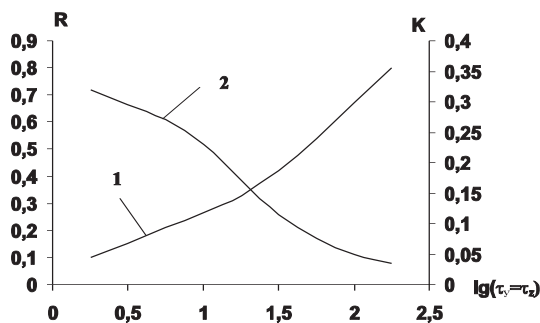


Рис. 1. Зависимость параметров R (1) и K (2) от поперечных оптических размеров среды

Физический смысл величин, входящих в инвариантные соотношения, заключается в следующем. Параметр $R(\tau_{yx}, \Lambda, \theta, r)$ имеет смысл коэффициента отражения от полубесконечного слоя [12]. В случае среды, ограниченной в поперечных направлениях, данный параметр — величина непостоянная, а является сложной функцией оптических свойств и размеров среды, что иллюстрируется рис. 1. $K(\tau_{yx}, \Lambda, \theta, r)$ представляет собой функцию ослабления, зависящую от поперечных оптических размеров и свойств среды и учитывающую дополнительное приращение интенсивности рассеянного излучения по сравнению с величиной интенсивности, определяемой законом Бугера [12].

Использование инвариантных соотношений (7) и (8) позволяет получить в отличие от широко применяемых в теории переноса излучения численных методов, например, метода Монте-Карло [13], аналитическое выражение для коэффициента отражения излучения. Согласно (3), поведение коэффициента отражения ρ дисперсной среды при изменении ее параметров в значительной степени определяется функцией R :

$$R(\tau_{y,z}; \Lambda; \theta; r) = \frac{1 - \frac{K(\tau_{y,z}; \Lambda; \theta; r)}{2}(a+1) + \frac{(1-\Lambda)(a-1)}{2}}{1 + \frac{K(\tau_{y,z}; \Lambda; \theta; r)}{2}(a+1) + \frac{(1-\Lambda)(a-1)}{2}}, \quad (9)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вигнер Е. Этюды о симметрии. — М.: Мир, 1971. — 320 с.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1970. — 856 с.
3. Енгибарян Н.Б., Мнацаканян М.А. О линейных задачах переноса // Доклады АН СССР. — 1974. — Т. 217. — № 3. — С. 533–535.
4. Иванов В.В. Принцип инвариантности и внутренние поля в плоской атмосфере // Астрономический журнал. — 1975. — Т. 52. — Вып. 2. — С. 217–226.
5. Яновицкий Э.Г. Рассеяние света в неоднородной атмосфере. В кн.: Распространение света в дисперсной среде. — Минск: Наука и техника, 1982. — С. 36–54.
6. Амбарцумян В.А. Научные труды. Т. 1. — Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1960. — 430 с.
7. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. — М.: ИЛ, 1953. — 431 с.
8. Горячев Б.В., Могильницкий С.Б. Некоторые особенности переноса излучения в пространственно ограниченных дисперсных средах // Известия Томского политехнического университета. — 2000. — Т. 303. — Вып. 3. — С. 91–104.
9. Лалетин Н.И. Метод поверхностных псевдоисточников для решения уравнения переноса нейтронов (GN-приближения) // В кн.: Вычислительные методы в теории переноса. — М.: Атомиздат, 1969. — С. 228–245.
10. Гуревич М.М. Фотометрия. — Л.: Энергоатомиздат, 1983. — 271 с.
11. Stokes G. On the intensity of the light reflected from or transmitted through a pill of plates // Matem. and Phys. Papers. — 1904. — V. 4. — P. 145–147.
12. Соболев В.В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 391 с.
13. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике / Под ред. Г.И. Марчука. — Новосибирск: Наука, 1976. — 100 с.

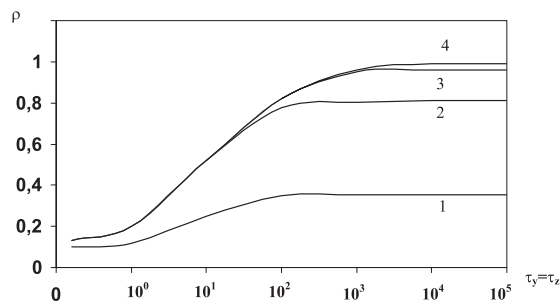


Рис. 2. Зависимость коэффициента отражения от поперечного оптического сечения среды: γ_x : 1) 10^0 , 2) 10^1 , 3) 10^2 , 4) 10^4 , $\alpha=1$, $\Lambda=1$

$$\text{где } a = \frac{\eta + 2\mu}{\beta + 2\mu}.$$

При отражении излучения от полубесконечной среды $R(\tau_{yx}, \Lambda, \theta, r)$ становится равным коэффициенту отражения всей среды ρ . Формула (9) подобна закону Френеля, описывающему отражение нормально падающего излучения от границы раздела двух сред.

Вид зависимости коэффициента отражения слоя фиксированной толщины τ_x от поперечного оптического сечения среды приведен на рис. 2.

Таким образом, использование общего принципа инвариантности позволяет получить инвариантные соотношения (7, 8) для пространственно-ограниченных сред с отражающими границами. Фотометрический инвариант (1), справедливый при любой толщине слоя среды, и не являющийся инвариантом при изменении поперечных оптических размеров рассеивающей среды, дополнен инвариантом (7) или (8), сохраняющимся при любых изменениях оптических размеров рассеивающей среды. Кроме того, использование этих инвариантных соотношений позволило определить коэффициент диффузного отражения излучения от дисперсной среды.